

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2013

الموضوع

NS24

الجمهورية المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه



4	مدة الاجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين والمسألة حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- المسألة تتعلق بالتحليل.....(10ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية وكاملة.

1- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي: $x * y = x + y - 2$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2)$

(أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 0.5

(ب) بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . 0.5

2- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي: $xTy = xy - 2x - 2y + 6$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2)$

ونعتبر التطبيق f من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} المعروف بما يلي: $f(x) = x + 2$; $(\forall x \in \mathbb{Z})$

(أ) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, T) 0.5

(ب) بين أن: $(x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$; $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3)$ 0.25

3- استنتج من كل ما سبق أن $(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة تبادلية و واحدة. 0.75

4- (أ) بين أن: $xTy = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$ 0.25

(ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, T)$ كاملة . 0.25

(ج) هل $(\mathbb{Z}, *, T)$ جسم ؟ (علل جوابك) 0.25

التمرين الثاني : (3.5 نقط)

I - ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$: (E)

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$ 0.25

2- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) 0.5

II - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر النقط A و B و M التي الحاقها على التوالي a و $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z

ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$ (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

1- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع. 0.5

2- (أ) بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ 0.5

(ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع. 0.5

3- نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$

(أ) بين أن : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$ 0.5

(ب) بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة. 0.75

التمرين الثالث: (3 نقط)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية :

$$(R): 3^n - 2^n \equiv 0 [n]$$

1- نفترض أن n يحقق الخاصية (R) و ليكن p اصغر قاسم اولي موجب للعدد n

(أ) بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$ 0.75

(ب) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ 0.5

(ج) بين أنه يوجد زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $an - b(p-1) = 1$ 0.5

(د) ليكن r و q باقي و خارج القسمة الاقليدية للعدد a على $p-1$ 0.5

$$(a = q(p-1) + r \text{ حيث : } 0 \leq r < p-1 \text{ و } q \in \mathbb{Z})$$

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

2- استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية (R) 0.75

مسألة: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $h(1) = 1$ و $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ ($\forall x > 1$) ;

الجزء الأول:

1- (أ) بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 0.25

(ب) بين أن : $\ln x < x - 1$ ($\forall x > 1$) ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1, +\infty[$ 0.75

2- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h 0.5

(ب) استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$ ($\forall x \geq 1$) ; 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $g(1) = \ln 2$ و $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$ ($\forall x > 1$) ;

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1-1	(أ) تحقق أن : $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$; $(\forall x > 1)$	0.25
	(ب) تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$	0.25
	(ج) بين أن : $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$	0.5
1-2	(أ) بين أن : $(\forall x > 1) ; (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$	0.5
	(ب) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1	0.5
	(ج) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$	0.75
3-1	(أ) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1, +\infty[$ و أن : $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$	0.75
	(ب) استنتج أن : $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g	0.5
	(ج) انشئ المنحنى (C)	0.5
الجزء الثالث:		
I-1	بين أن الدالة $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو المجال $]-\infty, \ln 2]$	0.5
	2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$	0.25
II	نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $1 \leq u_0 < \alpha$ و $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$; $(\forall n \geq 0)$	
1-1	(أ) بين أن : $1 \leq u_n < \alpha$; $(\forall n \geq 0)$	0.5
	(ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.	0.5
	(ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$	0.75
1-2	(أ) بين أن : $ u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $; $(\forall n \geq 0)$	0.5
	(ب) بين أن : $ u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 - \alpha $; $(\forall n \geq 0)$	0.5
	(ج) استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$	0.25

انتهى